数理解析研究所講究録
443巻 1981年 1-18

2次元周期系の周期解の個数について.

岩手大 教育 中島文雄
Iowa大学 George. Seifert

§1. まえがき. 2次元周期系の周期解の個数についていくつかの興味ある結果が得られている. 周期的外力を有するDuffing方程式について述べれば, その減衰係数が十分大であれば周期解は唯一つ存在し, この係数が小となれば, 複数個の周期解が存在し, 更にこれが0となれば無限ケの周期解が存在することが知られている([1], [2], [3])。他方, 外力のないVan-del-pol方程式は自励振動解を持ち, これは無限ケの周期解の存在と考えることが出来る.

本稿では2次元周期系に於て周期解の個数が有限となる十分条件を与える。ここで「有限」とは, 正確に言えば, ω を考えている周期系の周期とするとき, 任意の自然数 n に対し $n\omega$ より小なる周期の周期解の個数の有限性を

意味している。この結果により Duffing 方程式は その減衰定数 が nonzero であれば，周期解の個数は上の意味で有限ケである。

§2. 定理. n次元ユークリッド空間を R^n で表す. 2次元周期系を考える；

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{u} = U(t, u, v) \\ \dot{v} = V(t, u, v) \end{cases} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dt}\right)$$

ここで U と V は $(t, u, v) \in R^3$ で連続であり, 後述の様な解の唯一性の条件を満たしているものとし，更に t について周期 ω の周期関数とする；

$$U(t+\omega, u, v) = U(t, u, v)$$

$$V(t+\omega, u, v) = V(t, u, v).$$

(1)の解で，$t=0$ で $(x, y) \in R^2$ を通るものを $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ で表し，もし $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ が t について周期 ω の周期関数ならば, (x, y) を ω-periodic point と呼ぶ。

定義1. System (1) が Dissipative であるとは, 次の条件が成立することである；

(i) 任意の $(x,y)\in R^2$ に対し，解 $(u(t,x,y),\ v(t,x,y))$ が
$t\geqq 0$ で存在する，

(ii) R^2 の compact subset D が存在して，任意の
$(x,y)\in R^2$ に対し，

$$(u(t,x,y),\ v(t,x,y))\in D \quad \text{for large } t\geqq 0.$$

明らかに，(1) が Dissipative であれば，その periodic point は D に含まれる．

<u>定理</u> System (1) は Dissipative とする．もし $U(t,u,v)$，$V(t,u,v)$ が (u,v) について解析的で，

$$(2)\quad \frac{\partial U}{\partial u}(t,u,v)+\frac{\partial V}{\partial v}(t,u,v)<0 \quad \text{for all } (t,u,v)\in R^3$$

ならば，このとき ω-periodic points の数は有限である．

<u>注</u> n を任意の自然数とするとき，(1) は t について周期 $n\omega$ と見ることが出来る．従って定理より，周期 $n\omega$ の periodic points の数は有限である。

例として，Duffing 方程式を考える；

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -cv + \alpha u + \beta u^3 + B\cos t \end{cases}$$

ここで c, α, β は正の定数で、B は任意な定数である。この時、(3) は Dissipative であることが知られている。(3) の右辺は (u, v) について解析的であり、

$$\frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} = -c < 0$$

である。

故に、定理とその注釈より n を任意の自然数とする時、周期 $2n\pi$ の周期解は高々有限ケである。

§3. lemmas.

証明のため、次の lemmas を準備して置く。

<u>lemma 1.</u> System (1) に於て、$U(t, u, v)$, $V(t, u, v)$ が (u, v) について解析的であれば、この時、解 $(u(t, x, y), v(t, x, y))$ は、存在する限り、(x, y) について解析的である ([4])。

<u>Lemma 2</u>. 条件(2)を仮定する。このとき 2×2行列：

$$(4)\quad M(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\omega, x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(\omega, x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\omega, x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(\omega, x, y) \end{pmatrix}$$

に対し、

$$0 < \det M(x,y) < 1$$

が成立する。

<u>証明</u>. (1)の変分方程式を考える：

$$(5)\quad \dot{w} = A(t)\, w \qquad (w \in R^2)$$

ここで $A(t)$ は 2×2行列で

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial U}{\partial v}(t,u,v) \\ \frac{\partial V}{\partial u}(t,u,v) & \frac{\partial V}{\partial v}(t,u,v) \end{pmatrix}$$

ここで $u = u(t,x,y)$, $v = v(t,x,y)$ である。

$W(t)$ を(5)の基本行列で、$W(0)$ = 単位行列 とすれば、Abelの公式より

$$\det . W(t) = \exp \int_0^t \operatorname{trace} A(s)\, ds$$

$$= \exp \int_0^t \frac{\partial U}{\partial u}(s,u,v) + \frac{\partial V}{\partial v}(s,u,v)\, ds .$$

仮定より $\frac{\partial U}{\partial u}+\frac{\partial V}{\partial v}<0$ であるから

$$0<\det W(t)<1 \qquad \text{for } t>0.$$

今，$W(\omega)=M(x,y)$ であるから

$$0<\det M(x,y)<1$$

となり，証明は終る．

さて，Definition 1 の (i) の仮定の下に，Poincaré-mapping

$$T:(x,y)\in R^2\longrightarrow(u(\omega,x,y),\ v(\omega,x,y))\in R^2$$

が定義出来る．C を R^2 の中の Jordan 曲線とするとき，C が T-不変であるとは，T による C の image（TC で表す）が C と一致することである。

Lemma 3. Def. 1 の (i) を仮定し，更に条件 (2) が成立するとする。この時，T-不変な滑らかな Jordan 曲線は存在しない。

証明 反対に滑らかな Jordan 曲線 C が存在して

$$TC=C$$ とする．

Cの内部領域をEとすれば，解の初期値に対する唯一性より

$$TE = E \quad \text{である.}$$

Eの境界は滑らかな曲線 C であるから，Eの面積が定義できて，それを$|E|$で表すと

$$|E| = \iint_E dx\,dy \text{。}$$

TE については

$$|TE| = \iint_{TE} du\,dv.$$

今，$TE = \{ (u(\omega, x, y), v(\omega, x, y)) : (x, y) \in E \}$ であるから．

$$|TE| = \iint_E \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx\,dy \;.$$

ここで，(4) の $M(x, y)$ に対し

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det M(x, y) \quad \text{であるから，}$$

$$|TE| = \iint_E \det M(x, y)\, dx\,dy.$$

lemma 2 より，$0 < \det M(x, y) < 1$ であるから

$$|TE| < \iint_E dx\,dy = |E|.$$

これは $TE = E$ に矛盾する．証明は終る．

<u>lemma 8</u>. $F(x, y)$ を解析関数で，$R^2 \to R^n$ $(n \geq 1)$ とする．次の事を仮定する；

(i) 無限個の点 $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\subset R^2)$ が存在して

$$F(P_k) = 0 \quad \text{for all } k,$$

且つ

$$\lim_{k\to\infty} P_k = \bar{P} \quad \text{for some } \bar{P} \in R^2.$$

(ii) $F(p) = (F_1(p), F_2(p), \cdots, F_n(p))$ と表す時，上の $\bar{P}$ に対し，ある番号 i $(1 \leq i \leq n)$ が存在して

$$\frac{\partial F_i}{\partial y}(\bar{P}) \neq 0 \quad \text{である．}$$

この時，$\bar{P} = (x_0, y_0)$ と置くと，解析関数 $y = y(x)$; $I \to R^1$ （I は x_0 を含むある開区間）が存在して

(iii) $y_0 = y(x_0)$,

(iv) $F(x, y(x)) = 0$ on I,

(v) $P_k = (x_k, y(x_k))$ for some $x_k \in I$,

となる．

証明. 簡単のため $i=1$ とする. 即ち

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x_0, y_0) \neq 0 \qquad である.$$

今, $F(p_k)=0$ より $F(\bar{p})=0$. 従って

$$F_1(x_0, y_0) = 0$$

陰関数定理を $\underset{\neq 0}{F_1(x,y)}$ に適用すれば, 関数 $y=y(x)$ ($x \in I \to R^1$) (I は x_0 を含む開区間) が存在して

(vi) $y_0 = y(x_0)$

(vii) $F_1(x, y(x)) = 0$ on I,

(viii) $P_k = (x_k, y(x_k))$ for some $x_k \in I$,

ここで $F_1(x,y)$ は解析関数であるから, 上の $y(x)$ も $x \in I$ で解析的である.

さて, 任意の $j \geq 2$ に対し

$$\varphi(x) = F_j(x, y(x)) \quad (x \in I)$$

と置くと, $\varphi(x)$ は I 上で解析的であり,

$$\varphi(x_k) = F_j(x_k, y(x_k)) = F_j(p_k) = 0.$$

更に (vi) と (viii) より, x_0 は $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ の cluster point である. 故に

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{on } I.$$

従って

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \text{on } I.$$

証明は終了.

§4. 定理の証明.

証明は五段階に分けて行う.

Step 1. $F(x,y): R^2 \to R^2$ を次の様に定義する:

$$F(x,y) = (f(x,y),\ g(x,y)),$$

$$f(x,y) = u(\omega, x, y) - x$$

$$g(x,y) = v(\omega, x, y) - y.$$

すると, lemma 1 より $F(x,y)$ は (x,y) の解析関数である. 明らかに, (x,y) が ω-periodic point であることは

$$F(x,y) = (0,0)$$

と同値である. 以下, 簡単のため, 2次元ベクトル F が $F=(0,0)$ ならば, $F=0$ と書き, $F \neq (0,0)$ ならば $F \neq 0$ と書く.

2次元縦ベクトル

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

に対し, 2×2 行列

$$(6) \quad N(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right)$$

を考える.

$$N(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\omega,x,y)-1 & \frac{\partial u}{\partial y}(\omega,x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(\omega,x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(\omega,x,y)-1 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$(7) \quad N(x,y) = M(x,y) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで $M(x,y)$ は lemma 2 の行列である。
λ_1, λ_2 を $M(x,y)$ の2つの固有値とすれば、lemma 2 より

$$0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$$

従って、$|\lambda_1| \neq 1$ あるいは $|\lambda_2| \neq 1$ が成立する。

他方、(7) の形より、$N(x,y)$ の固有値は $\lambda_1 - 1$ および $\lambda_2 - 1$ である。従って $N(x,y)$ の固有値の一方は nonzero である。故に $N(x,y)$ は nonzero matrix となり

$$(8) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \neq 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0 \quad \text{for } (x,y) \in R^2$$

が成立する。

Step 2. さて定理の結論と反対に、ω-periodic points が無限個存在していると仮定し、これらを $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ で表す。これらは有界であるから cluster point $\bar{P}$ が存在して、

$$P_k \to \bar{P} \qquad (k \to \infty)$$

と仮定して良い。

C を R^2 の部分集合で、$\bar{P}$ を含む ω-periodic points の set の connected component とする。すると C の任意の点は ω-periodic points の cluster point である。この時、C は一次元 analytic manifold であることを示す。即ち p を C の任意の点とし（$p \in C$）、ε を十分小なる正数とすると，p の C における ε-近傍

$$C(\varepsilon, p) = \{ z \in C \ ; \ |z - p| < \varepsilon \}$$

（ここで $|z-p|$ は z と p の間の距離を表す）は次の I あるいは II のいづれかに表現されることを示す。

今，$P = (x_0, y_0)$ とすると

（I）解析関数 $y = y(x) \ ; \ I \to R^1$（I は x_0 を含むある開区間）が存在して

$$y_0 = y(x_0)$$

$$C(\varepsilon, P) = \{ (x, y(x)) \ ; \ x \in I \},$$

（II）解析関数 $x = X(y) \ ; \ J \to R^1$（J は y_0 を含むある開区間）が存在して

$$x_0 = X(y_0)$$

$$C(\varepsilon, p) = \{ (X(y), y) \ ; \ y \in J \}.$$

実際，Step 1 により

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

である.

前者を仮定すると，lemma 1 より，解析関数 $y = y(x)$; $I \to R^1$ (I は x_0 を含むある開区間) が存在して

$$y_0 = y(x_0)$$
$$F(x, y(x)) = 0 \quad \text{on } I.$$

更に，$\xi \in C(\varepsilon, p)$ に対し，$F(\xi) = 0$ であるが，ε が十分小なる時，$\xi \in C(\varepsilon, p)$ に対し，lemma 1 の (iii) より

$$\xi = (x, y(x)) \quad \text{for some } x \in I$$

と表される。即ち，I を適当に選べば

$$C(\varepsilon, p) = \{ (x, y(x)) \; ; \; x \in I \}$$

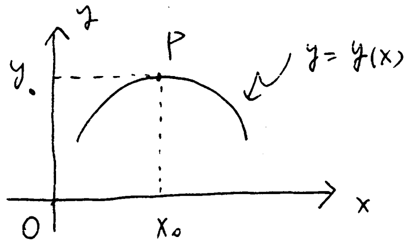
となる.

かくして (I) が成立する．もし，後者を仮定すれば，同様にして (II) が導かれる.

Step 3. C は有界であるから，ある点 $p = (x_0, y_0) \in C$ が存在して (I) が成立し，更に関数 $y = y(x)$ に対し

(9) $$\frac{d}{dx} y(x_0) = 0$$

となる.（図を参照）



(9) は次の事を意味する：

$$(10) \quad \frac{\partial F}{\partial x}(p) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 .$$

実際に，(I) が成立するから

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \text{on } I.$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \frac{dy(x)}{dx} = 0 \quad \text{on } I.$$

ここで，$x = x_0$ とおくと，(9) より

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y(x_0)) = 0 .$$

$y(x_0) = y_0$ であるから，(10) が成立する．

<u>Step 4</u>　一般に一次元 manifold C は Jordan 曲線か，あるいは R^1 に同相であることが知られている。ここでは，C が Jordan 曲線であることを示す。反対に，C が R^1 と同相であると仮定すると，(10) を満す無限ケの点が存在する．これらを $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ で表す．

$$F(p_k) = 0$$
$$(11) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(p_k) = 0$$

が成立している. 今, $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ が有界であるから, cluster point $\bar{p}$ が存在し; 従って

$$p_k \to \bar{p} \qquad (k \to \infty)$$

と仮定して良い. 故に

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{p}) = 0.$$

Step 1 の (8) より, これは

$$(12) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{p}) \neq 0$$

を意味する.

さて

$$G(x,y) = \left(F(x,y), \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \right) \quad \text{for } (x,y) \in R^2$$

を考える. $G(x,y)$ は (x,y) の解析関数であり, (11) より

$$G(p_k) = 0$$

(12) より $\quad \dfrac{\partial G}{\partial y}(\bar{p}) \neq 0 \quad$ である.

Lemma 4 を $G(x,y)$ に適用すれば, $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y})$ と書くと, 解析関数 $y = \bar{y}(x) : I \to R^1$ が存在して,

（I は $\bar{x}$ を含む ある開区間）

$$\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$$

$$G(x, \bar{y}(x)) = 0 \qquad \text{on } I.$$

即ち

$$(13) \qquad F(x, \bar{y}(x)) = 0 \qquad \text{on } I$$

$$(14) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x, \bar{y}(x)) = 0 \qquad \text{on } I.$$

Step 1 の (8) より，(14) は

$$(15) \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{y}(x)) \neq 0 \qquad \text{on } I$$

を意味する．今，(13) の両辺を x で微分して

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \bar{y}(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, \bar{y}(x)) \frac{d\bar{y}(x)}{dx} = 0 \qquad \text{on } I.$$

(14), (15) より

$$\frac{d\bar{y}(x)}{dx} = 0 \qquad \text{on } I.$$

故に $\qquad \bar{y}(x) = \text{constant} = \bar{y} \qquad \text{on } I.$

これを (13) に代入すると

$$(16) \qquad F(x, \bar{y}) = 0 \qquad \text{on } I.$$

今, $F(x,\xi)$ は任意の $x \in R^1$ で解析的であるから, (16) は

$$F(x,\xi)=0 \quad \text{on } R^1$$ を意味する.

これは $\{(x,\xi)\ ;\ x\in R^1\}$ が ω-periodic points の集合であることを意味しており,

$$C=\{(x,\xi)\ ;\ x\in R^1\}$$

となる. C は有界であるから, これは矛盾である.

Step 5. C は滑らかな Jordan 曲線である. 更に, C は ω-periodic points から成っているので, Poincaré-mapping T に対し不変である. これは Lemma 3 に矛盾する. 故に ω-periodic points は, 高々有限ケしか存在しない. 証明は終る.

参考文献

[1] J.K. Hale, Ordinary Differential equations (book), pp. 195–202. Interscience series on pure and applied mathematics, Wiley-Interscience.

[2] C. A. Harvey, Periodic solutions differential equation $\ddot{x}+g(x)=p(t)$, Contributions to Differenential Equations, Vol. 1. No. 4, 425–451.

[3] G. R. Morris, a differential equation for undamped forced non linear oscillations, Proc. Cambr. Phil. Soc., 51 (1955), 297-312; 54 (1958), 426-438.

[4]. 岡村博, 微分方程式序説, pp. 112-115, 森北出版.